|  |
| --- |
| Дагестанский институт усовершенствования педагогических кадров Кафедра фмо и ИКТ |
| Проектная работа на тему: |
| «Методы доказательства алгебраических тождеств и неравенств» |
|  |
| Выполнила:  Ибрагимова Лейла Тажировна  учительница МКОУ  « Куркентская средняя общеобразовательная  школа №1 им М. Рагимова»    Руководитель: Ризаев М.К. |
| **[Выберите дату]** |

|  |
| --- |
|  |

Содержание

Введение…………….………………………………………………………….3 Глава I. Обзор литературы по теме проекта………………………………….5

Глава II. Доказательство алгебраических тождеств…………………………8

- Способы доказательства алгебраических тождеств……………………… .8

- Основные методы доказательства неравенств. ……………………………12

- Неравенство Коши …….…………………………………………………….12

- Доказательство неравенств путем определения знака разности их

Частей……………………….………………………………………………….15

- Доказательство неравенств с помощью использования ранее

доказанных и очевидных неравенств …….………………………………….17

- Метод оценивания …………………………….…………………………… 19

- Доказательство неравенств методом от противного….…………………...20

- Доказательство неравенств методом математической индукции…..….….21

- Метод использования тождеств ………………………………………..…..22

- Метод введения новых переменных ………………………………………..22

- Метод интерпретаций или моделей ………………........................................24

- Функционально-графические методы доказательства неравенств……….25

- Метод уменьшения числа переменных в неравенстве и понижения

степеней неравенств…………………………………………………………...25

- «Доказательство неравенств» в школьном курсе математики…………….27

- Заключение……………………………………………………………………30

**Введение**

Решением тождеств и неравенств мы занимаемся на протяжении всего школьного курса. Неравенства можно решать графическим и аналитическим способом. Чтобы решить любое неравенство существует определенный алгоритм действий, поэтому данная задача является, скорее механическим действием, который не требует творческого подхода.

Напротив, доказательство неравенств, требует неформального, иначе говоря, вариативного подхода. Поэтому доказательство неравенств является наиболее интересным. Однако, в школьном курсе математики доказательству неравенств и тождеств уделяется очень мало внимания. Доказательство неравенств и тождеств, сводится к одному приему - оценке разности частей неравенства. Между тем, на математических олимпиадах часто встречаются задачи на доказательство тождеств и неравенств, с применением других способов и приемов (использование опорных неравенств, метод оценивания). Кроме того, многие задачи повышенной сложности (из различных разделов математики) эффективно решаются с помощью неравенств. Поэтому рассматриваемая тема проекта является **актуальной.**

**Цель проекта – учебная:** познакомить учащихся с основными методами доказательств алгебраических тождеств и неравенств**.**

**Задачи исследования -** научить учащихся поиску и применению различных методов доказательства алгебраических тождеств и неравенств.

**Предмет исследования -** формы работ учащихся на уроках математики в процессе доказательств алгебраических тождеств и неравенств.

**Гипотеза исследования –** применение своеобразных форм работы с учащимися, привитие умение использоваться математическими формулами и расширить знания в области приемов и методов доказательств алгебраических тождеств и неравенств.

В результате освоения предметного содержания предлагаемой темы

математики у учащихся предполагается формирование универсальных

учебных действий ( познавательных, регулятивных, коммуникативных), позволяющих достигать предметных, метапредметных и личностных результатов.

* Метапредметные результаты – освоенные обучающимися на базе нескольких или всех предметов обобщенные способы деятельности или универсальные учебные действия, применимые как в рамках образовательного процесса, так и при решении реальных познавательных или практических задач в различных областях человеческой деятельности.
* Универсальные учебные действия – это совокупность способов действий учащегося, которые обеспечивают его способность к самостоятельному усвоению новых знаний и умений.
* В структуре универсальных учебных действий выделяют личностный, регулятивный, познавательный и коммуникативный блоки.
* Личностными результатами обучающихся являются: готовность ученика целенаправленно использовать знания в учении и повседневной жизни исследования математической сущности темы; способность характеризовать собственные знания по теме, формулировать вопросы, устанавливать, какие из предложенных задач могут быть им успешно решены, познавательный интерес к науке.

Предметными результатами осуществляются: освоенные знания о методах доказательства алгебраических тождеств и неравенств.

Регулятивные действия обеспечивают систематизацию учащимися своей учебной деятельности.

В ходе доказательства различных тождеств и неравенств происходит формирование коммуникативных результатов

**Глава I. Обзор литературы по теме проекта.**

* + 1. Алгебра: Учеб. для 8 кл. сред. шк./ Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.В.; Под ред. Теляковского С.А. – М.: Просвещение, 2006
    2. Алгебра и начала анализа. 10-11 класс. В 2ч. Задачник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень)/ Мордкович А.Г., Денищева Л.О., Звавич Л.И., Корешкова Т.Н. и др; Под ред. Мордковича А.Г. - М.: Мнемозина, Просвещение, 2007.
    3. Азевич А.И. Система подготовки к единому государственному экзамену. Журнал «Математика в школе» – М.,2003. № 4. – С. 32 – 36.
    4. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. – М.: Наука, 1975.
    5. Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства. – М.: Мир, 1965.
    6. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. М.:Наука,1986. –
    7. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре для 8 – 9 классов. М.: Просвещение, 1992.
    8. Глейзер Г.И. История математики в школе VII – VIII классы. Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1982.
    9. Гомонов С.А. Замечательные неравенства: способ получения и примеры применения. 10 – 11 классы. Элективные курсы. Учебное пособие для профильных классов общеобразовательных учреждений. М.: Дрофа, 2005.
    10. Дорофеев Г.В., Кузнецов Л.В., Седова Е.А. Алгебра и начала анализа. 10 класс. Учебник. М.: Просвещение, 2007.
    11. ЕГЭ. Математика. Типовые тестовые задания/ Корешкова Т.А., Глазков Ю.А., Мирошин В.В., Шевелева Н.В. - М.: Экзамен, 2008.
    12. Математика. ЕГЭ: Сборник заданий и методических рекомендаций/ Глазков Ю.А., Варшавский И.К., Гаиашвили М.Я. М.: Экзамен, 2008.
    13. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2 частях. Ч. 1. Учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) М.: Мнемозина, 2007
    14. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала анализа. 10 класс. Учебник. М.: Просвещение, 2007.
    15. Сборник задач по математики для поступающих в вузы/ Егерев В.К., Зайцев В.В., Кордемский Б.А., Маслова Т.Н. и др.; Под редакцией Сканави М.И. М.: Оникс 21 век, Мир и Образование, 2004.
    16. Фадеев Д.К., Ляшенко Н.Н., Никулин М.С., Соколовский И.Ф. Задачи по алгебре для 6 – 8 классов. М.: Просвещение, 1988.
    17. Фоминых Ю.В. Доказательство неравенств. Журнал «Математика в школе» – М., 1998.
    18. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научится решать задачи. М.: Просвещение, 1989.
    19. Э.И. Эфендиев. Практикум по элементарной математике. Махачкала 2015.

В [1] доказательство большинства тождеств и неравенств, приводится к уже доказанным простейшим тождествам и неравенствам. Так как в качестве приемов доказываются некоторые тождества и неравенства, которые являются опорными для доказательства других тождеств и неравенств.

В [2] - [8] доказательства неравенств в профильной школе изучается в 10 классе. Здесь основная цель – научить применять опорные неравенства к доказательству более сложных неравенств.

В [9] - [14] сначала рассматриваются простейшие неравенства, а затем неравенства, приводящие к простейшим методом замены. Тема изучается в 10 классе.

В [15] - [18] даны примеры простых и более сложных методов доказательства алгебраических тождеств и неравенств.

В [19] приведены следующие методы доказательства неравенств: неравенство Коши, метод оценивания, метод использования тождеств и т.д. При доказательстве неравенств и тождеств выполняются различные преобразования.

В [1] - [19] и некоторых других источников нами взяты примеры, наиболее ярко характеризующие тот или иной метод доказательства алгебраических тождеств и неравенств.

**Выводы:** из анализа рекомендуемой литературы видно, что доказывать тождества и неравенства можно различными методами, причем все книги соответствуют требованиям ФГОС.

**ГЛАВА II.**

**1. Доказательство тождеств.**

В математике существует множество понятий. Одно из них тождество. Тождеством называют равенство, которое выполняется при всех значениях переменных, которые в него входят.

Некоторые тождества мы уже знаем. Например, все формулы сокращенного умножения являются тождествами.

Примеры тождеств:

a+b=b+a

a+(b+c)=(a+b)+c

ab=ba

a(bc)=(ab)c

a(b+c)=ab+ac

a+0=a

a∙0=0

a∙1=a

a∙(-1)=-a

Доказать тождество – это значит установить, что для любого допустимого значение переменные его левая часть равна правой части.

В алгебре существует несколько различных способов доказательства тождеств.

**2. Способы доказательства алгебраических тождеств.**

**1.** Выполнить равносильные преобразования левой части тождества. Если в итоге получим правую часть, тогда тождество считается доказанным.

**2.** Выполнить равносильные преобразования правой части тождества. Если в итоге получим левую часть, тогда тождество считается доказанным.

**3.** Выполнить равносильные преобразования левой и правой части тождества. Если в результате получим одинаковый результат, тогда тождество считается доказанным.

**4.** Из правой части тождества вычитаем левую часть. Производим над разностью равносильные преобразования. И если в итоге получаем нуль, то тождество считается доказанным.

**5.** Из левой части тождества вычитают правую часть. Производим над разностью равносильные преобразования. И если в итоге получаем нуль, то тождество считается доказанным.

Следует так же помнить, что тождество справедливо лишь для допустимых значений переменных.

Как видите способов достаточно много. Какой способ выбрать в данном конкретном случае, зависит от тождества, которое вам необходимо доказать. По мере того, как мы с детьми будете доказывать различные тождества, придет и опыт в выборе способа доказательства.

Я рассматриваю такие примеры доказательства тождеств.

**Пример 1.**

Докажите тождество

x(a+b) + a(b-x) = b(a+x).

Решение.

Так как в правой части небольшое выражение, попытаемся преобразовать левую часть равенства.

**Имеем,**

x(a+b) + a(b-x) = xa+xb+ab – ax.

Приведем подобные слагаемые и вынесем общий множитель за скобку.

xa+xb+ab – ax = xb+ab = b(a+x).

Получили что левая часть после преобразований, стала такой же как и правая часть. Следовательно, данное равенство является тождеством.

**Пример 2.**

Докажите тождество a^2 + 7a + 10 = (a+5)(a+2).

Решение.

В данном примере можно поступить следующим способом. Раскроем скобки в правой части равенства.

Получим,

(a+5)(a+2) = (a^2) +5a +2a +10= a^2+7a+10.

**Вывод:**

Видим, что после преобразований, правая часть равенства стала такой же как и левая часть равенства. Следовательно, данное равенство является тождеством.

**Пример 3.**

Проверить, данное выражение тождество?



Решение:

Преобразуем, правую часть равенства

(а+2)(а+5)= а² + 5а + 2а+ + 10 = а² + 7а + 10

**Вывод:**

В результате тождественного преобразования правой части равенства, мы получили его левую часть и тем самым доказали, что данное равенство является тождеством.

**Пример 4.**

Докажем тождество

Решение.

Упростим обе части равенства



**Вывод:**

Так как левая и правая части данного равенства равны одному и тому же выражению, то они тождественно равны между собой.

Значит исходное равенство – тождество.

**Пример 5.**

(m-a)(m-b) = m²- (a+b)m + ab

Решение

(найдем разность между левой и правой частями выражения)

(m-a)(m-b) – [m² - (a+b)m + ab] =

=m² - mb – ma + ab - [m² - am – bm + ab ] =

= m² - mb – ma + ab - m² + am + bm - ab = 0

**Вывод :**

Так как разность между левой и правой частями выражения равна нулю,

то данное выражения является – тождеством.

Наряду с доказательством тождеств есть и различные методы доказательства неравенств. Рассмотрим некоторые случаи.

3. **Основные методы доказательства неравенств.**

Задачи на доказательство неравенств особенные. Конкретных особых подходов здесь нет. Одно и тоже неравенство можно доказать различными способами. Разберем теперь наиболее часто встречающие приемы установления истинности неравенств с переменными, продемонстрировав соответствующие идеи и методы на конкретных примерах. В дальнейшем речь пойдет о неравенствах справедливость которых требует доказать на заданном множестве значений переменных. Если такое множество неуказанно, то подразумевается, что эти переменные могут принимать любые действительные значения.

**4. Неравенство Коши.**

Пусть а и b – неотрицательные числа. Доказать, что ≥.

Это неравенство иногда называют неравенством Коши в честь французского математика XIX в.Огюста Коши.

Доказательство: Составим разность левой и правой частей: (a+b)/2 -= =((a+b)-2)/2=(- )2/2 .

Получим неотрицательное число, значит, ≥. Число  называют средним арифметическим чисел а и b; число называют средним геометрическим чисел а и b. Таким образом, неравенство Коши, означает, что среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не менее их среднего геометрического.

Неравенство Коши имеет любопытное геометрическое истолкование. Пусть дан прямоугольный треугольник и пусть высота h, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки а и b. В геометрии доказано, что h=. А что такое ? Это длина половины гипотенузы. Но из геометрии известно, что медиана m прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, как раз равна половине гипотенузы. Таким образом, неравенство Коши означает, что длина медианы, проведенной к гипотенузе (т.е. ), не меньше длины высоты, проведенной к гипотенузе (т.е. ).

*Замечание:*Из неравенства Коши вытекают следующие неравенства, используемые нами ранее при доказательстве предыдущих неравенств, которые широко применяются при доказательстве неравенств вообще. a+b≥2, если a и b – произвольные неотрицательные; , если a и b – произвольные положительные числа; , если a и b – произвольные ненулевые числа одного знака.

Обобщив неравенство ≤ на 3,4,5…n неотрицательных чисел знаменитый французский математик Огюстен Луи Коши доказал в 1821 г. следующее неравенство:

≤,

т.е. среднее геометрическое n неотрицательных чисел не больше среднего арифметического этих чисел. Равенство существует при условии, если только все n чисел равны между собой. Докажем это неравенство методом математической индукции.

**Пример 1**. а) Доказать, что если положительные числа х1,х2,…хn таковы, что х1х2…хn =1, то х1+х2+…+хn ≥n.

б) Доказать, что для любого натурального числа n≥2 справедливо неравенство

≥ , где все числа а1,а2,…аn положительны.

Доказательство*:* а) Проверим выполнение утверждения для n=2. пусть произведение двух положительных чисел х1,х2 равно 1. поскольку ≥ ≥, получаем, что х1+х2 ≥2, что и требовалось установить.

Предположим, что утверждение выполняется для n=к, т.е. предположим, что если х1х2…хк =1, где все множители – положительные числа х1 +х2 +…+хк≥≥к. Докажем, что тогда из равенства х1х2…хк хк+1=1следует неравенство х1 +х2++…+хк +хк+1 ≥к+1.

Если х1 =х2 =…=хк =хк+1=1, то х1 +х2 +…+хк +хк+1=к+1; можно записать и так х1 +х2 +…+хк +хк+1 ≥к+1. Значит в этом тривиальном случае утверждение выполняется. Если в произведении х1х2…хк хк+1 не все множители равны 1, то найдется хотя бы одна пара чисел таких, что одно больше 1, а другое меньше 1; обозначим эти числа соответственно хк  и хк+1, а их произведение обозначим Хк.

Имеем х1х2…хк-1 хк хк+1=1, т.е. х1х2… хк-1, Хк =1. поскольку произведение к положительных чисел равно 1, то и по индукционному предположению их сумма не меньше к: х1+ х2+… +хк-1 +Хк≥к.

Докажем, что Хк< хк +хк+1-1.

В самом деле, Хк- (хк +хк+1-1)=1+ хк хк+1- хк -хк+1=( хк-1)( хк+1-1). Выше мы отметили, что хк>1, а хк+1<1. значит, ( хк-1)( хк+1-1)<0, а потому Хк< хк +хк+1-1.

А теперь рассмотрим интересующую нас сумму х1+ х2+… +хк-1. Имеем: (х1+ +х2+… +хк-1)+( хк +хк+1)> (х1+ х2+… +хк-1)+ Хк+1.

По принципу математической индукции утверждение доказано для любого натурального числа n≥2.

б) Введем обозначение: А=. Справедливо равенство

=1. но тогда, согласно утверждению, доказанному в пункте а), выполняется неравенство ≥n, т.е. ≥А, что и требовалось доказать.

Приведем еще две полезные формы записи неравенства Коши:

х1+х2+…+хn≥n

и (х1+х2+…+хn)n≥nn х1х2x3…хn – в первой записи нет дроби, во второй – ни дроби, ни радикала. Если ими не пользоваться, то выкладки всегда будут более громоздкими.

**5. Доказательство неравенств путем определения знака разности их частей.**

Этот метод исследования неравенств по другому называют «Доказательство неравенств с помощью определения». Определение сравнения двух действительных чисел было приведено выше. По определению считается, что A>B, если (A-B) – положительное число. Поэтому для доказательства неравенства f(a, b…k) > g(a, b…k) на заданном множестве значений a, b…k – достаточно составить разность f(a, b…k) и убедится в том, что она положительна при заданных значениях a, b…k. Именно этим способом доказано выше неравенство Коши и некоторые свойства неравенств.

Пример 2. Доказать, что если ab>0, то  ≥2.

Доказательстваем: имеем  - 2= . Так как ab>0, то 2≥0, причем знак равенства имеет место лишь при a=b. Итак, разность  - 2 неотрицательна, неравенство доказано.

**Пример 3**. Докажем, что любых положительных чисел a и b справедливо неравенство 4(a3+b3)≥(a+b)3

Доказательство: рассмотрим выражение А=4(a3+b3) - (a+b)3.

Сначала преобразуем его:

А=4(a+b)(а2-ab+b2)-(a+b)(а2+2ab+b2)=(a+b)(4а2-4ab+4b2-а2-2ab-b2)= =(a+b)(3а2-6ab+3b2)=3(a+b) (a-b)2. Так как a>0, b>0, то А≥0, т.е. доказана справедливость неравенства.

4(a3+b3)≥(a+b)3.

**Пример 4.** Докажите, что для любых действительных чисел a,b,c,d,e справедливо неравенство

а2+b2+c2+d2+e2≥ a(b+c+d+e).

Я привожу доказательство. Составим и преобразуем разность а2+b2+c2+d2+e2- -a(b+c+d+e)=(-b)2 +(-с)2+(-d)2+(-e)2. Очевидно, что эта разность принимает лишь неотрицательные значения, что доказывает исходное неравенство. Кроме того, очевидно, что оно выполняется в варианте равенства тогда и только тогда, когда = b=c=d=e.

**Пример 5**. Докажите, что если n≥3, n  N, то справедливо неравенство ≥.

Доказательство: перейдем к доказательству равносильного данному неравенства n4> ( n+1)3 и проанализируем разность n4- ( n+1)3 . Очевидно, что n4- ( n+1)3 = n4 – n3- 3n2- 3n-1= n3 (n-3)+ 2n2(n-3)+3n(n-3)+6(n-3)+17, а значит, при n≥3, n4-( n+1)3>0 как сумма четырех неотрицательных и одного положительного слагаемого.

**6. Доказательство неравенств с помощью использования ранее доказанных и очевидных неравенств.**

**Пример 6**. Докажем, что для любых положительных чисел x справедливо неравенство х+ ≥2.

Доказательство: рассмотрим неравенство ≥1 и левой части которого записано среднее арифметическое положительных чисел х и , а в правой – их среднее геометрическое.

Следовательно, неравенство≥1 справедливо на основании неравенства Коши. Но тогда на основании полученного утверждения справедливо неравенство ≥1.

Этот метод еще носит название метод синтеза. Суть этого метода заключается в синтезировании неравенства, которое требует обосновать из опорных (базисных) неравенств «законными» средствами, проистекающими из свойств числовых неравенств и методов их установления.

Опорными неравенствами являются, например, такие:

1) ≥ , где x≥0, y≥0 (неравенство Коши);

2) x+≥2, где x>0

3) -1 ≤ sin ≤1;

4) -1 ≤ cos ≤1;

5) а2≥0

6)  ≥2, где ab>0.

7) (a-c)2+(b+d)2≥0, a,b,c,d - действительные числа

8) /2<tg /2, 0<<π/2

9) sin /2< /2, 0<<π/2

**Пример 7.** Доказать, что для любых а, b, с  R выпол­няется неравенство

а2 + b2 + с2 ≥ аb + bс + са.

Для доказательства мы применим неравенство Коши, но «по частям». Сначала - «неизвестно зачем», но это будет по­нятно позже, - умножим левую часть неравенства на 2 и пе­регруппируем слагаемые:

2(а2 + b2 + с2) = (а2 + b2) + (b2 + с2) + (с2 + а2),

и применим неравенство Коши к каждой сумме в правой части.

Имеем:

а2 + b2 ≥ 2= 2≥2аb,

так что

2(а2 + b2 + с2) ≥ 2аb + 2bс + 2са,

что и требовалось доказать.

**Пример 8.** Доказать, что ()n>n!,где nN, n>1.

Доказательство. Возьмем в качестве опорных следующие неравенства Коши:

≥; ≥;

≥; …;≥; ≥.

Перемножим эти неравенства, получим:

()n ≥==2=n!

Итак, ()n≥n!. Так как по условию n≠1, то первое и последнее из опорных неравенств Коши могут быть только строгими. Но тогда и после перемножения опорных неравенств полученное неравенство должно быть строгим. Таким образом, ()2>n!, что и требовалось доказать.

**7. Метод оценивания**

При решении многих задач, в частности, при рассмотрении различных функций особую роль играет оценка значения вы­ражения сверху или снизу, т. е. указание верхней или ниж­ней границы выражения. Никаких универсальных способов для нахождения такой оценки не существует, так что поиск нужной оценки является чисто эвристической, можно ска­зать, творческой работой. Оценка часто необходима не только для доказательства « готового», заданного неравенства, но и для сравнения числовых выражений, когда истинное неравен­ство требуется установить самостоятельно.

Пример 9. Докажите, что для любых действительных чисел a,b,c,d таким, что a2+b2=1, c2+d2=1, выполняется неравенство |ac-bd|≤1.

Я доказываю это неравенство методом усиления.

Применим свойство модуля и неравенство Коши:

|ac-bd|≤|ac|-|bd| = ≤, что и обосновывает исследуемое неравенство.

Решение методом ослабления.

Учитывая, что a2+b2=1, c2+d2=1, заключаем:

1=(a2+b2)(c2+d2)=a2c2+a2d2+b2c2+b2d2=(ac)2-2abcd+(bd)2+(ad)2+2adbc+(bc)2=(ac- - bd)2+(ad-bc)2≥(ac-bd)2, т.к. (ad-bc)2 при

любых действительных a,b,c,d принимает только значение из полученных соотношений следует, что |ac-bd|≤1.

**8. Доказательство неравенств методом от противного.**

Суть этого метода заключается в следующем. Пусть нужно доказать истинность неравенства f(x;y;z)>g(x;y;z).

Предполагают противное, т.е. что хотя бы для одного набора переменных справедливо неравенство f(x;y;z)≤g(x;y;z).

Используя свойства неравенств, выполняют преобразования последнего неравенства. Если в результате этих преобразований получается ложное неравенство, то это означает, что предположения о справедливости неравенства неверно, а поэтому верно исходное неравенство.

Пример 10. Доказать, что если a≥0,b≥0,c≥0,d≥0, то ≥

Доказательство. Предположением противное, т.е. что для некоторого набора значений a,b,c,d справедливо неравенство<.

Возведем обе его части в квадрат. Получим ab+bc+ad+cd<ab+2+cd.

Откуда bc+ad<2 и заменим <.

Но это противоречит неравенству Коши, составленному для неотрицательных чисел bc и ad. Значит, наше предположение неверно, т.е. для любых неотрицательных значений a,b,c,d справедливо неравенство<.

Пример 11. Докажите, что для любых действительных чисел a,b,c справедливо неравенство .

Доказательство: очевидно, что данное неравенство достаточно установить для любых действительных чисел a,b,c будем иметь следующие соотношения:

=≥≥, что является обоснованием исходного неравенства.

Пусть теперь нашлись такие неотрицательные числа a,b,c, для которых выполняется неравенство , но тогда выполняется неравенство

, тогда и неравенство

>, а значит и неравенство a2+b2+c2+2ab+2ac+2bc- 3a2+3b2+3c2>0 или –( 2a2+2b2+2c2-2ab-2ac-2bc) >0, т.е. –(a-b)2+(d-c)2+(b-c)2>0, что невозможно ни при каких действительных a,b,c. Сделанное выше предположение опровергнуто, что и доказывает неполное неравенство.

**9. Доказательство неравенств методом математической индукции.**

При доказательстве неравенств часто прибегают к методу математической индукции. Доказательство при помощи метода математической индукции того, что некоторое утверждение, в которое входят натуральные числа n верно, состоит из доказательства двух шагов:

***Шаг 1****.* Утверждение верно при n=1.

***Шаг 2****.*  Из справедливости утверждения для какого – либо произвольного натурального n=к следует его справедливость для следующего натурального n=к+1. Если обе эти теоремы доказаны, то на основании принципа (аксиомы) математической индукции заключаем, что утверждение верно для любого натурального n. Если надо доказать утверждение не для всех натуральных n, а лишь начиная с некоторого натурального m>1, то доказательство проводится так:

1. Доказывается, что утверждение верно при n=m;
2. Доказывается, что из справедливости утверждения при n=к, где к≥ m, вытекает, что оно верно и при n=к+1.

**Пример 12.** Доказать, что для любых действительных чисел справедливо неравенство ||≤.

Доказательство. При n=2 неравенство принимает вид ≤. Это верно неравенство оно доказано ранее. Предположим, что неравенство верно n=к (к≥2), т.е. ||≤|, и докажем, что тогда оно верно и при n=к+1, т.е. докажем, что ||≤. В самом деле, пусть =Ак, тогда ||==|Ак+ак+1|≤|Ак|+|ак+1|= =||≤. По принципу математической индукции неравенство верно для любых действительных .

**10. Метод использования тождеств.**

Пример 13. Докажите, что для любых действительных чисел a и b справедливо неравенство a2+ab+b2 ≥ 0.

Доказательство.Воспользуемся очевидным тождеством a2+ab+b2 = =(а+, которое учитывая, что для любых a, b  R (а+≥0, немедленно приводит к требуемому результату.

Для следующего неравенства используем замечательное тождество, тождество Лагранжа: (х( (а1х1+a2х2+…+аnxn)2=(x1a2--x2a1)2+(x1a3-x3a1)2+…+(x1an-xna1)2+(x2a3-x3a2)2+…+(x2an-xna2)2+…+= =(xn-1an-xnan-1)2.

Для обоснования этого тождества достаточно составить разность между его левой и правой частями, раскрыть скобки и привести подобные.

**11. Метод ведения новых переменных (метод подстановки)**

**Пример 14**.Докажите, что для любых положительных чисел a,b,c справедливо неравенство .

Доказательство.Рассмотрим неравенство А+В+С≥, где А,В и С – любые действительные неотрицательные числа, и положим: А=; В= и С=, где a,b,c – произвольные положительные действительные числа, в результате получим требуемое неравенство.

**Пример 15.** Докажите, что для любых положительных чисел a,b,c справедливо неравенство ≥3.

Я привожу такое доказательство. Обозначим b+c=2x, c+a=2y, a+b=2z, причем очевидно, что при любых положительных чисел a,b,c числа x,y,z будут тоже положительны, а вот обратное неверно, поэтому, найдя a,b,c из системы



т.е. получив:



можно будет переписать исследуемое неравенство в следующем виде:

≥3,

однако не будет никакой гарантии, что оно справедливо при любых положительных x,y,z, даже если справедливо исследуемое неравенство. Однако если нам повезет и неравенство истинно, то это будет гарантировать справедливость и неравенства, но

=(+(-3) ≥ 2+2+2-3=3, что обосновывает исследуемое неравенство.

Заметим, что именно неравенство Коши, примененное к положительным числам , дало соотношение .

**12. Метод интерпретации или моделей.**

**.**

Рассмотрим неравенства доказательство которых можно получить, используя хорошо известные неравенства треугольника. Вспомним, что для любых трех точек A,B,C справедливо соотношение (А, С)≤ (А, В)+ (В, С), где символом (M, N) обозначено расстояние от точки М до точки N.

Пример 16: Докажите, что для любых действительных чисел а,

b и c справедливо неравенство



Доказательство. Рассмотрим в прямоугольной системе координат ХОУ точки O(0; 0), В(2а; 2b) и А(а + c; b) и запишем для них не­равенство треугольника ОB≤ОА + АВ.

Более тонким средством (нежели неравенство треугольника) для получения замечательных неравенств служит теорема косинусов. Продемонстрируем ее «работу» при решении конкретных задач.

**Пример 17.** Докажите, что для любого действительного числа

справедливо неравенство .

Я привожу такое доказательство. Рассмотрим два случая: а) х ≤0; б) х > 0.

а) Если х ≤0, то 9 + х2 - 3х 9; 16 + х2 - 4х 16, а значит, .

б) Если х > 0, то обратимся к геометрической модели: рассмот­рим прямоугольный треугольник АВС с катетами АС = 3; СВ = 4 и биссектрису CD его прямого угла С, причем обозначим CD = х. Используя теорему косинусов, получаем:

AD= =;

ВD= =. Остается воспользоваться неравенствами треугольника

AD + DB ≥ АВ и учесть, что

АВ = = 5 (ABC - египетский).

**14 Функционально – графические методы доказательство неравенств.**

Это метод доказательства неравенств с помощью введения вспомогательных функций, с целью использования их свойств монотонности, т.е. возрастания или убывания, а также знание точек максимума, или минимума функции. Это позволяет сравнивать значение функции в различных точках области определения или на определенном промежутке.

**Пример 18.** Доказать, что при 0<x<0,5 справедливо неравенство 2x+>5.

Приводится доказательство. Рассмотрим функцию y=f(x), где f(x)=2x+ и найдем ее производную  (x)= (2x+=(2x+x-2=2-2x-3=.

Заметим, что  (x)<0 при 0<x<1, значит, в частности, функция убывает на полуинтервале (0;0,5]. Поэтому для любого х из интервала (0;0,5) справедливо неравенство f(x)> f(0,5). Но f(0,5)=5, значит на полуинтервале (0;0,5) выполняется неравенство f(x)>5, что и требовалось доказать.

**15. Метод уменьшения числа переменных в неравенстве и понижения степени неравенства.**

При доказательстве неравенства из примера 33 был продемонстрирован способ уменьшения числа переменных, рассмотрение следующих двух примеров обогатит наши знания еще одним достижением того же.

**Пример 19.** Докажите, что для любых положительных а, b, с справедливо неравенство

а3 + b3 +с3 – а2b – аb2 – а2с - ас2 - b2с - bс2 + 3аbс≥0.

Мною приводится доказательство. Разделим правую и левую части неравенства на с3 (с > 0, а значит, и с3 > 0) и введем новые переменные:=u, = v. В результате получим новое неравенство

и3 + v3 + 1-u2v - uv2 - u2 - u - v2 - v + 3uv≥0; u, v > 0, доказательство которого равносильно доказательству исходного неравенства. Перепишем его левую часть в следующем виде:

(u + v)3 - 3uv(u + v) + 1 - uv(u + v) - (u + v)2 +

+ 2uv - (u + v) + 3uv ≥0

и введем новые переменные: x= и + v и у = u • v, причем x> 0, y > 0 и х2 ≥ 4у. Теперь получили неравенство вида

y · (5 - 4х) + (x3 - х2 - x + 1)≥0, где x> 0, 0< у≤,

чье обоснование позволит сделать вывод и о справедливости исход­ного неравенства. Существенными достижениями в результате сде­ланных преобразований явились следующие: уменьшилось число переменных, а степень относительно переменного у оказалась равна единице. Преобразовав полученное неравенство к виду

(5 - 4х)· у + (х3 -х2 -х + 1)≥0

и введя в рассмотрение следующую вспомогательную функцию (считая х произвольным фиксированным положительным чис­лом) f(у) = (5- 4х) ·у + (х3 - -х2 - х + 1) с областью определения R, можем заключить, что при любом фиксированном значении х графиком этой функции будет прямая.

Следовательно, ее наименьшее значение на отрезке [0; ] достигается на одном из его концов. Однако легко найти f(0) = (х - 1 )2(х + 1) и f() =  (х-2)2, а значит, убедиться, что и f(0)≥0, и f()≥0, что и доказывает истинность исходного неравенства.

**16.Доказательство неравенств» в школьном курсе математики.**

На базовом уровне задачи на доказательства неравенств встречаются в учебнике Ю.Н. Макарычева «Алгебра 8 кл.» в теме «Числовые неравенства и их свойства». Я рассматривала применение темы проекта в Куркентской общеобразовательной школе им. Рагимова.

Изложение материала начинается с определения понятий меньше и больше . Введенное определение является опорным при доказательстве свойств числовых неравенств и при выполнении упражнений на доказательства неравенств. Доказательства неравенств проводятся при помощи сравнения с нулем разности их левой и правой частей.

Затем рассматриваются неравенства, доказанные с использованием основных свойств, доказанных сразу, а так же, что очень важно, я рассматриваю задачи на оценивание значений выражений. В дальнейшем приобретенные навыки доказательства неравенств находят применение при рассмотрении общих свойств функций.

В профильной школе, в учебнике А.Г. Мордковича, П.В. Семенова тема «Доказательство неравенств» затрагивается в 10 кл. при изучении темы «Множество действительных чисел» при рассмотрении числовых неравенств.

В качестве основного способа сравнения действительных чисел я использую определение: «Говорят, что действительное число а больше (меньше) действительного числа b, если их разность a-b – положительное (отрицательное) число».

Пишут: a>b (a<b).

Далее речь идет о положительных, отрицательных числах, строгих и нестрогих неравенствах.

Приводятся основные свойства числовых неравенств, свойство транзитивности доказывается. Говорится об основанных идеях доказательства неравенств.

И здесь я показываю, что первая идея - составить разность левой и правой части неравенства и вычислить какое число получится положительное или отрицательное. Вторая идея – для доказательства нового свойства использовать уже известные свойства.

В качестве примеров доказываются некоторые неравенства, которые являются опорными для доказательства других неравенств:

1. Пусть a и b положительные числа и a>b. Доказать, что 1/а < 1/b

2. Пусть a положительное число. Доказать, что а+1/а ≥2.

Особое внимание обращается на неравенство Коши: «Пусть a и b – неотрицательные числа. Доказать, что (a+b)/2 ≥».

Кроме того, дается геометрическое истолкование неравенства Коши: в прямоугольном треугольнике, длина медианы, проведенная к гипотенузе (т.е. (a+b)/2), не меньше длины высоты, проведенной к гипотенузе (т.е. )

Далее с помощью свойств числовых неравенств мы сравниваем действительные числа по величине, оцениваются результаты.

Доказательство неравенств с помощью производной основывается на теореме об условии постоянства функции. Теорема приводится без доказательства, а затем рассматривается решение примеров. Дидактического на эту тему дано достаточно.

В учебнике А.Г. Мордковича, П.В. Семенова «Алгебра и начало анализа» 11 кл. профильный уровень тема раскрывается исчерпывающим, доступным образом. Показано, как доказываются неравенства с помощью определения. Для доказательства неравенства f(a, b…k) > g(a, b…k) на заданном множестве значений a,b…k достаточно составить разность f(a, b…k) - g(a, b…k) и убедится, что она положительна при заданных значениях a,b…k.

Далее рассматривается синтетический метод доказательства неравенств. Суть этого метода заключается в том, что с помощью ряда преобразований доказываемое неравенство выводят из некоторых известных (опорных)неравенств. В качестве опорных я ис­пользовала, например, такие неравенства:

а) а2 ≥ 0;

б) (a+b)/2 ≥, a≥0, b≥0

в) (a/b +b/a) ≥ 2, где ab >0

г) |sin x| ≤ 1, |cos x| ≤ 1.

Далее раскрывается доказательство неравенств методом от противного. Здесь снова красной нитью проходит противоречия с неравенством Коши, используются, что квадрат любого действительного числа положителен, тригонометрические преобразования и основные тригонометрические неравенства.

Математическая индукция рассматривалась учениками в 10 кл. в 11 кл. идет ее применение к доказательству неравенств, причем используются неравенства доказанные в 10 классе.

Функционально – графические методы доказательства неравенств так же рассматриваются на примерах. Опора идет на хорошо отработанные в 10 классе знания тригонометрических функций их свойств, преобразование тригонометрических выражений, применение производной к исследованию функций.

Тема рассматривается на конкретных примерах. Дидактический материал дан достаточно широко, как всегда задачи разного уровня, требующие творческого подхода.

**Заключение.**

Рассматриваемая тема: «Методы доказательства алгебраических тождеств и неравенств» направлена на устранение существующей в школьном курсе математики резкой диспропорции между решением тождеств и неравенств и их доказательством , и, что особенно важно, доказательство тождеств и неравенств – один из важнейших видов математической деятельности, тогда как решение тождеств и неравенств – «привилегия» именно школьной математики, весьма далеко – за исключением, пожалуй, простейших случаев – отстоящих от математики как науки.

Понятно, что доказательство неравенств как задача сложнее, чем усвоение алгоритмов решения простых неравенств – доказательство обычно основано на эвристике, а не на алгоритмах. Поэтому в основной школе принято рассматривать лишь неравенство Коши между средними арифметическим и геометрическим и следствие о сумме взаимно обратных чисел, хотя в рамках содержания обучения основной школы вполне можно рассматривать соответствующие неравенства и для средних гармонического и квадратического – их доказательства вполне алгоритмичны. Но в профильном курсе ознакомление учащихся с самой задачей доказательства неравенств и с применяемыми методами рассуждений представляется в настоящее время совершено необходимым. Это позволяет учащимся при решении задач перейти с уровня формально – оперативных умений, на более высокий уровень, позволяющий строить логические цели рассуждения; делать выводы о выборе решения, анализировать и оценивать полученные результаты.